วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 66(703) มกราคม – เมษายน 2564
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $7^x - 5^y = z^2$

The Solution of The Exponential Diophantine Equation $7^x - 5^y = z^2$

สุทธิวัฒน์ ทองนาค[1,*] วาเรียม ช่วยจันทร์[2] และ ธีรเดช เกื้อวงค์[3]
[1, 2, 3] สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

Sutthiwat Thongnak[1,*] Wariam Chuayjan[2] and Theeradach Kaewong[3]
[1, 2, 3] Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science,
Thaksin University, Phatthalung 93210

Email: [1]tsutthiwat@tsu.ac.th [2]wariam_chuayjan@hotmail.com [3]theeradachkaewong@gmail.com

วันที่รับบทความ : 18 มีนาคม 2563 วันที่แก้ไขบทความ : 17 มิถุนายน 2563 วันที่ตอบรับบทความ : 29 กรกฎาคม 2563

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ นำเสนอการพิสูจน์ว่า สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $7^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในการพิสูจน์ เราได้ใช้ข้อคาดการณ์ของคาตาลานและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมภาคมาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งพบว่า ผลเฉลยมีเพียงชุดเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง ผลเฉลยจำนวนเต็ม ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน

[*] ผู้เขียนหลัก

ABSTRACT

In this paper, we prove that the exponential Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$ has one solution where $x,\ y$ and z are non-negative integers. In the proof, we apply reasonably Catalan's conjecture and various theorems concerning the congruence to obtain the solution. The result reveals that the unique solution is $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Keywords: Exponential Diophantine equation, Integer solution, Catalan's conjecture

1. Introduction

Diophantine equations have been interesting to many mathematicians for a long time. Over the last decade, a number of the exponential Diophantine equations have been studied since Catalan presented Catalan's conjecture [3] and Mihailescu proved this conjecture [11]. In 2007, Acu studied the equation $2^x + 5^y = z^2$ [1]. He proved that $(3, 0, 3)$ and $(2, 1, 3)$ are the only two solutions (x, y, z) where $x,\ y$ and z are non-negative integers. In 2011, Suvarnamani et al. suggested that two equations which are $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$ have no integer solutions [21]. In 2012, the Diophantine equation $4^x + p^y = z^2$ where $x,\ y$ and z are non-negative integers and p is any positive prime number was studied by Chotchaisthit. The study revealed that the equation does not have solutions [5]. Meanwhile, Sroysang [15 - 16] proved two Diophantine equations including $3^x + 5^y = z^2$ and $31^x + 32^y = z^2$. In the same year, Peker and Cenberci presented that the Diophantine equation $8^x + 19^y = z^2$ has no solution [12]. After that several Diophantine equations have been studied by different mathematical researchers [4, 7, 13, 14, 17, 18, 19, 20]. In 2017, Jayakumar and Shankarakalidoss proved that the Diophantine equation $47^x + 2^y = z^2$ has a unique non-negative solution $(x, y, z) = (0, 3, 3)$ [6] while Asthana and Singh showed that $(1, 0, 2)$, $(1,1,4)$, $(3, 2, 14)$ and $(5, 1, 16)$ are solutions (x, y, z) to the Diophantine equation $3^x + 13^y = z^2$ [2]. After that, Kumar et al. [8] studied two equations including $61^x + 67^y = z^2$ and $67^x + 73^y = z^2$. They could show that the two equations have no solution. Recently, Laipaporn et al. proved the solution of $3^x + p5^y = z^2$ where p is a prime number. They found that the equations has infinitely many solutions [9]. While Makate et al. proved that $8^x + 61^y = z^2$ and $8^x + 67^y = z^2$ have same unique solution $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ [10].

In this paper, we present a different Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$ and prove that the equation has only one trivial solution.

2. Preliminaries

Proposition 2.1 [11] (Catalan's conjecture) $(3, 2, 2, 3)$ is a unique solution (a, b, x, y) for the Diophantine equation $a^x - b^y = 1$ where $a,\ b,\ x$ and y are integers such that $\min\{a, b, x, y\} > 1$.

Lemma 2.2 The Diophantine equation $7^x - z^2 = 1$ has no solution (x, z) where x and z are integers and $\min\{x, z\} > 1$.

Proof. Suppose that x and z are integers where $\min\{x, z\} > 1$ such that $7^x - z^2 = 1$. By Proposition 2.1, it is sufficient to conclude that the equation has no solution. $\square$

3. Main Result

Theorem 3.1 The Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$ has a unique solution $(x, y, z) = (0,0,0)$ where $x,\ y$ and z are non-negative integers.

Proof. Let x, y and z be non-negative integers such that

$$7^x - 5^y = z^2. \tag{1}$$

First, we consider two cases including $x = 0$ and $x \geq 1$.

Case 1 If $x = 0$, then from (1) we have $z^2 + 5^y = 1$. Obviously, the equation has only one solution when z and $y = 0$.

Case 2 If $x \geq 1$, then we separate y in two subcases including $y = 0$ and $y \geq 1$.

Subcase 1 If $y = 0$, then $7^x - z^2 = 1$. By Lemma 2.2, it is sufficient to consider only $x = 1$ or $z \leq 1$. Hence, we consider x and z which are as follow. For $x = 1$, we have

$z^2 = 6$. This is impossible. For $z = 0$, it follows that $7^x = 1$. It has no solution. For $z = 1$, we have 7^x =2. This is impossible.

Subcase 2 If $y \geq 1$, then z^2 is even which implies that $z^2 \equiv 0 \pmod 4$. From (1), it follows that $z^2 \equiv (-1)^x - 1 \pmod 4$. Then, we have $(-1)^x - 1 \equiv 0 \pmod 4$. This implies that x is positive even, so we let $x = 2m$ where $m \in Z^+$. From (1), we have $5^y = 7^{2m} - z^2$. It is written as

$$5^y = (7^m + z)(7^m - z). \tag{2}$$

From (2), it yields (3) and (4):

$$5^\alpha = 7^m - z \tag{3}$$

and

$$5^\beta = 7^m + z, \tag{4}$$

where $0 \leq \alpha < \beta \leq y$ and $\alpha + \beta = y$. From (3) and (4), we have

$$2 \cdot 7^m = 5^\alpha\left(1 + 5^{\beta-\alpha}\right). \tag{5}$$

We separate α into $\alpha = 0$ and α ≥1.

If $\alpha = 0$, then (5) becomes $2 \cdot 7^m = 1 + 5^\beta$. Thus, we have $2 \equiv 1 + (-1)^\beta \pmod 3$. This implies that β is even. Let $\beta = 2t$ where $t \in Z^+$, we have

$$2 \cdot 7^m = 1 + 25^t. \tag{6}$$

From (6), we have $2 \cdot (-1)^m \equiv 1 + 1 \pmod 8$. This implies that m is even. Suppose $m = 2l$ where $l \in Z^+$. Then, we have

$$2 \cdot 49^l = 1 + 25^t. \tag{7}$$

From (7), we have $2 \cdot (-1)^l \equiv 1 \pmod 5$ which is impossible.

If $\alpha \geq 1$, (5) implies that $5 \mid 2 \cdot 7^m$ which contradicts the fact that 2, 5 and 7 are relatively primes. Hence, the theorem is proved. □

References

[1] Acu, D. (2007). On A Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 4, p. 145 - 148.

[2] Asthana, S., and Singh, M. M. (2017). On The Diophantine Equation $3^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 114, p. 301 - 304.

[3] Catalan, E. (1844). Note Extraite Dune Lettre Adressee a Lediteur. *Journal für die Reine and Angewandte Mathematik*, 27, p. 192.

[4] Cheenchan, I., Phona, S., Ponggan, J., Tanakan, S., and Boonthiem, S. (2016). On The Diophantine Equation $p^x + 5^y = z^2$. *SNRU Journal of Science and Technology*, 8, p. 146 - 148.

[5] Chotchaisthit, S. (2012). On The Diophantine Equation $4^x + p^y = z^2$ Where p is A Prime Number. *American Journal Mathematics and Sciences*, 1, p. 191 - 193.

[6] Jayakumar, P., and Shankarakalidoss, G. (2017). More on The Diophantine Equation $47^x + 2^y = z^2$. *International Jouranal of Innovative Research in Science and Technology*, 3, p. 82 - 85.

[7] Khan, Md. A., Rashid, A., and Uddin, Md. S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x + 9^y = z^2$ and $5^x + 9^y = z^2$. *Journal of Applied Mathemtics and Physics*, 4, p. 762 - 765.

[8] Kumar, S., Gupta, S., and Kishan, H. (2018). On The Non-Linear Diophantine Equation $61^x + 67^y = z^2$ and $67^x + 73^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 18 (1), p. 91 - 94.

[9] Laipaporn, K., Wananiyakul, S., & Khachorncharoenkul, P. (2019). On The Diophantine Equation $3^x + p5^y = z^2$. *Walailak Journal of Science and Technology*, 16 (9), p. 647 - 653.

[10] Makate, N., Srimud, K., Warong, A., and Supjaroen, W. (2019). On The Diophantine Equation $8^x + 61^y = z^2$ and $8^x + 67^y = z^2$. *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty the King*, 64 (697), p. 24 - 29.

[11] Mihailescu, P. (2004). Primary Cycolotomic Units and A Proof of Catalan's Conjecture. *Journal für die Reine and Angewandte Mathematik* , 27, p. 167 - 195.

[12] Peker, B. and Cenberci, S. (2012). Solutions of The Diophantine Equation $8^x + 19^y = z^2$. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 2, p. 31 - 34.

[13] Qi, L., and Li, X. (2015). The Diophantine Equation $8^x + p^y = z^2$. *The Scientific World Journal (online)*, 22, 2015.

[14] Rabago, J. F. T. (2013). More on Diophantine Equation of Type $p^x + q^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Scientific Computing*, 3, p. 15 - 16.

[15] Sroysang, B. (2012). On The Diophantine Equation $3^x + 5^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81, p. 605 - 608.

[16] Sroysang, B. (2012). On The Diophantine Equation $31^x + 32^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81, p. 609 - 612.

[17] Sroysang, B. (2013). On The Diophantine Equation $7^x + 8^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84, p. 111 - 114.

[18] Sroysang, B. (2013). On The Diophantine Equation $23^x + 32^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 84, p. 231 - 234.

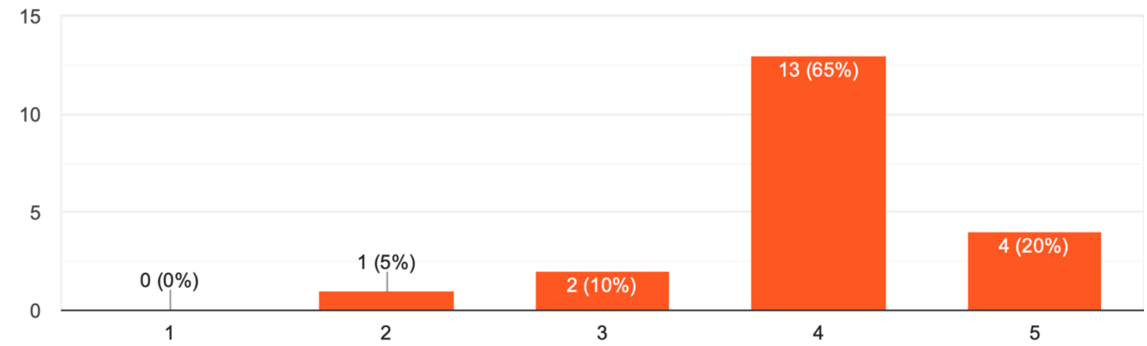
[19] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation $8^x + 13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 90, p.69-72.

[20] Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation $5^x + 43^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 91, p. 537 - 540.

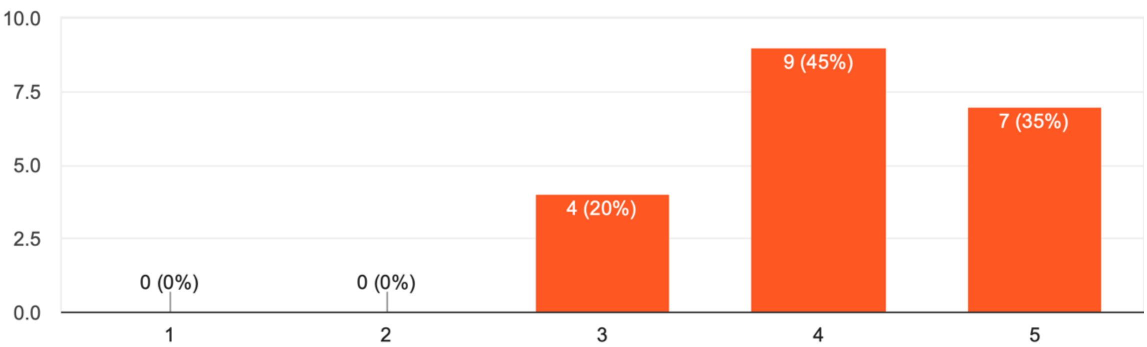
[21] Suvarnamani, A., Singta, A., and Chotchaisthit, S. (2011). On Two Diophantine Equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$. *Science and Thechology RMUTT Journal*, 1, p. 25 - 28.

ผลการประเมินความพึงพอใจการจัดกิจกรรมบูรณาการรายวิชาตัวแปรเชิงซ้อนกับการวิจัย

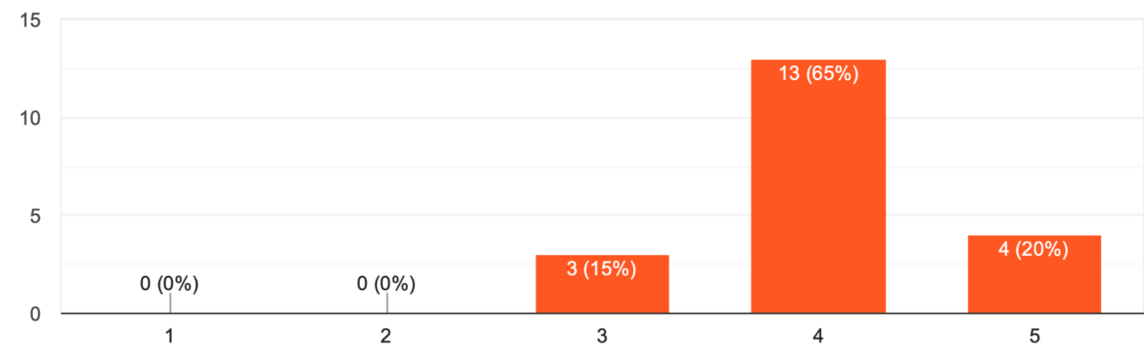
นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องฟังก์ชันเชิงซ้อนในระดับใด
คำตอบ 20 ข้อ



กิจกรรมบูรณาการมีความสอดคล้องกับเนื้อหาในรายวิชาตัวแปรเชิงซ้อนในระดับใด
คำตอบ 20 ข้อ

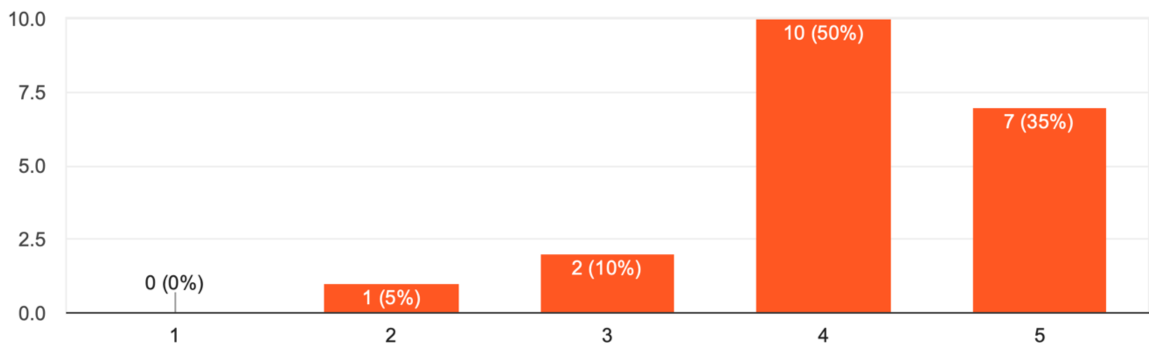


กิจกรรมการบูรณาการทำให้มีความเข้าใจเนื้อหาที่เรียนมากยิ่งขึ้น
คำตอบ 20 ข้อ



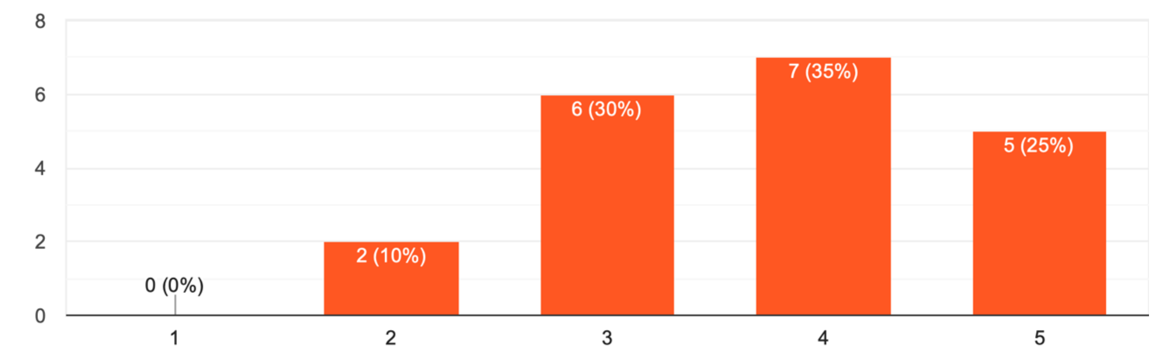
นักศึกษาได้รับความรู้และประสบการณ์นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียน

คำตอบ 20 ข้อ



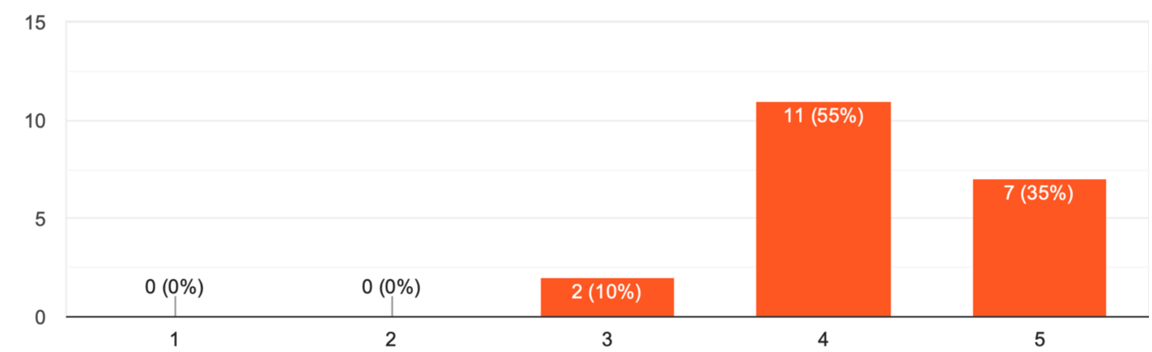
นักศึกษาสามารถนำความรู้จากการบูรณาการไปพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ได้

คำตอบ 20 ข้อ



นักศึกษาได้รับประโยชน์จากการจัดกิจกรรมบูรณาการในระดับใด

คำตอบ 20 ข้อ



ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

คำตอบ 5 ข้อ

เวลาในการจัดกิจกรรมน้อยไปหน่อยครับ อยากให้นานกว่านี้ครับ

เป็นกิจกรรมที่ดีค่ะ

อยากให้เพิ่มเรื่องในตัวแปรเชิงซ้อนอีกครับ

กิจกรรมดีครับ แต่เนื้อหาค่อนข้างยากไปหน่อยครับ ผมตามไม่ทันครับ

ตัวอย่างยากไปหน่อยครับ อยากให้อธิบายให้ละเอียดมากกว่านี้